

## 2. Übung Komplexitätstheorie

Abgabe: bis Dienstag, den 18.4. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung

### Aufgabe 1

Eine 2D-Turingmaschine besitzt anstatt linearer Arbeitsbänder einen zweidimensionalen Arbeitsspeicher  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , in dem sich der Lese-/Schreibkopf in die Richtungen  $S$  (Süd),  $N$  (Nord),  $W$  (West) und  $O$  (Ost) bewegen kann.

- Definieren Sie dieses Maschinenmodell und den entsprechenden Berechnungsbegriff formal.
- Skizzieren Sie einen Beweis, dass jedes Problem genau dann in Polynomzeit auf einer 2D-Turingmaschine lösbar ist, wenn es auch in Polynomzeit auf einer gewöhnlichen  $k$ -Band-Turingmaschine lösbar ist.

*Hinweis:* Die Felder des Arbeitsspeichers können z. B. durch diagonale Aufzählung sequentiell angeordnet werden.

### Aufgabe 2

Für  $A \subseteq \mathbb{N}$  betrachten wir die Unärdarstellung  $\text{UN}(A) := \{1^n : n \in A\}$  und die Binärdarstellung  $\text{BIN}(A) := \{\text{bin}(n) : n \in A\}$ . Beweisen Sie folgende Behauptungen:

- $\text{UN}(A) \in \text{P}$  genau dann, wenn  $\text{BIN}(A) \in \text{DTIME}(2^{O(n)})$  und
- $\text{UN}(A) \in \bigcup_{d \in \mathbb{N}} \text{DSPACE}(\log^d(n))$  genau dann, wenn  $\text{BIN}(A) \in \text{PSPACE}$ .

### Aufgabe 3

- Es ist bekannt, dass  $\text{DSPACE}(0) = \text{REG}$ , d. h. Turingmaschinen ohne Speicher erkennen genau die regulären Sprachen. Verwenden Sie dieses Resultat um zu zeigen, dass auch  $\text{DSPACE}(O(1)) = \text{REG}$ .
- Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{\text{bin}(1)\# \text{bin}(2)\# \dots \# \text{bin}(k) : k \in \mathbb{N}\}$$

mit Platz  $O(\log \log n)$  entschieden werden kann.

Folgern Sie daraus, dass  $\text{REG} \subsetneq \text{DSPACE}(O(\log \log n))$ .