Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, T. Ganzow, Ł. Kaiser

SS 2006

5. Übung Komplexitätstheorie

Abgabe: bis Dienstag, den 9. 5. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung

Aufgabe 1

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *kontextsensitiv*, falls sie durch eine kontextsensitive Grammatik erzeugt werden kann. Eine Grammatik G über einem Alphabet $\Gamma \supset \Sigma$ ist eine endliche Menge von Ableitungsregeln der Gestalt $w \to w'$ mit $w, w' \in \Gamma^*$ und einem ausgezeichneten Startsymbol $S \in \Gamma \backslash \Sigma$. Sie heißt kontextsensitiv, wenn dabei stets $|w| \leq |w'|$ gilt (mit Ausnahme der eventuell vorhandenen Regel $S \to \varepsilon$). Die von G erzeugte Sprache in Σ^* ist dann $L(G) := \{w \in \Sigma^* \ : \ w \text{ aus } S \text{ in endlich vielen Schritten ableitbar}\}$. Jede Regel $w \to w'$ ermöglicht dabei gerade alle Ableitungen $v_1 w v_2 \vdash v_1 w' v_2$ für $v_i \in \Gamma^*$.

Sei $\mathsf{CSL} := \{L \ : \ L \text{ ist kontextsensitiv}\}$. Zeigen Sie: $\mathsf{CSL} \subseteq \textsc{Nspace}(n)$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass $\textsc{Nspace}(n) \subseteq \mathsf{CSL}$.

Hinweis: Jede Sprache in $\textsc{Nspace}(n)$ kann von einer nichtdeterministischen 1-Band-Turingmaschine mit eindeutig bestimmter akzeptierender Konfiguration (Zustand q^+, Kopfposition 0, leeres Band) entschieden werden. Stellen Sie eine Konfiguration (q, w, p) durch ein Wort der Form $w_0 \dots w_{p-1}(qw_p)w_{p+1} \dots$ über dem Alphabet $\Sigma \cup (Q \times \Sigma)$ dar.

Bemerkung: Das Ergebnis $\textsc{Nspace}(n) = \mathsf{CSL}$ liefert uns auch den Nachweis, dass die Klasse der kontextsensitiven Sprachen unter Komplement abgeschlossen sind.

Aufgabe 3

(a) HORN-3SAT bezeichnet das Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln, deren Klauseln jeweils höchstens drei Literale enthalten, d. h. für Formeln $\psi = \bigwedge_i \bigvee_j Y_{ij}$ in KNF, in denen jede Disjunktion $\bigvee_j Y_{ij}$ höchstens drei Literale enthält, von denen wiederum jeweils höchstens eines positiv ist. Zeigen Sie, dass HORN-3SAT P-vollständig ist.

(b) Sei $A = \{1, \dots, n\}$ eine nicht-leere Menge, $\circ$ eine binäre Funktion auf A und S eine Teilmenge von A. Der *Abschluss* $\langle S \rangle$ von S ist die kleinste Menge $U \subseteq A$ mit $S \subseteq U$, so dass $u \circ v \in U$ wenn $u, v \in U$.

Das Problem GEN besteht darin, für gegebene $A, \circ, S$ und $c \in A$ zu entscheiden, ob $c \in \langle S \rangle$. Beweisen Sie, dass GEN P-vollständig ist.

Hinweis: Beweisen Sie, dass GEN $\in$ P und HORN-3SAT $\leq_{\log}$ GEN.

Aufgabe 4

Beweisen Sie folgende Behauptungen:

(a) Eine Sprache L ist genau dann NP-vollständig, wenn ihr Komplement $\overline{L}$ co-NP-vollständig ist.

(b) Es gibt keine P-vollständigen Probleme bezüglich Linearzeit-Reduktionen.

(c) $\mathrm{P} \neq \textsc{Dspace}(n)$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\textsc{Dspace}(n)$ nicht unter P-Reduktionen abgeschlossen ist.