Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, T. Ganzow, Ł. Kaiser

SS 2006

6. Übung Komplexitätstheorie

Abgabe: bis Dienstag, den 16. 5. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass das Problem für zwei gegebene Graphen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ zu entscheiden, ob es einen Homomorphismus von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{H}$ gibt, NP-vollständig ist. Wie verhält sich die Komplexität, wenn $\mathcal{G}$ bzw. wenn $\mathcal{H}$ fixiert ist. Wie verhält sich die Komplexität, wenn $\mathcal{G}$ bzw. wenn $\mathcal{H}$ fixiert ist?

Hinweis: Betrachten Sie Färbbarkeitsprobleme.

Aufgabe 2

Ein Problem A heißt *polynomial Turing-reduzierbar* auf das Problem B ($A \leq_p^T B$), wenn $A \in \mathrm{P}^B$, d. h. wenn eine deterministische, polynomial zeitbeschränkte Orakel-Turingmaschine existiert, welche mit Orakel B die Menge A entscheidet. Eine Komplexitätsklasse $\mathcal{C}$ heißt abgeschlossen unter $\leq_p^T$, wenn gilt:

$$A \leq_p^T B \text{ und } B \in \mathcal{C} \;\Rightarrow\; A \in \mathcal{C}.$$

Welche der folgenden Komplexitätsklassen sind abgeschlossen unter $\leq_p^T$?

$$\mathrm{P}, \quad \mathrm{NP}, \quad \Sigma_k^p \quad \Delta_k^p, \quad \mathrm{PH}, \quad \textsc{Pspace}$$

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die Menge der aussagenlogischen Formeln, für die es keine kürzere äquivalente Formel gibt, in Π_2^p ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Problem, gegeben eine AL-Formel ψ in DNF und eine Zahl k in Unärdarstellung, entscheide ob eine Darstellung von ψ in KNF mit höchstens k Klauseln existiert, in Σ_2^p ist.

(c) Sei UNIQUE-TSP die Menge der Distanzmatrizen D, für die eine *eindeutige* Tour minimaler Länge existiert. Zeigen Sie, dass UNIQUE-TSP $\in \Delta_2^p$. (Siehe auch Übung 1, Aufgabe 3)

Aufgabe 4

Das Spiel Geography wird von zwei Spielern auf einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit einem ausgezeichneten Startknoten u gespielt. Der erste Spieler beginnt mit dem Knoten u, anschließend ziehen die Spieler abwechselnd zu einem Nachbarknoten $w \in vE$ des jeweils zuletzt gezogenen Knotens v, dürfen dabei jedoch nur solche Knoten wählen, die bisher noch nicht gezogen wurden. Falls ein Spieler nicht mehr ziehen kann (weil entweder der aktuelle Knoten gar keinen Nachfolger hat, oder alle Nachfolger bereits gezogen wurden), verliert er. Zeigen Sie, dass das Problem Geography, zu einem Graphen G und einem Knoten u zu entscheiden, ob Spieler I eine Gewinnstrategie hat, Pspace-vollständig ist.

Hinweis: Verwenden Sie eine Reduktion von QBF auf Geography.