Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, T. Ganzow, Ł. Kaiser

SS 2006

8. Übung Komplexitätstheorie

Abgabe: bis Dienstag, den 30. 5. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung

Aufgabe 1

Geben Sie ALogspace-Algorithmen an für:

(a) das Circuit Value Problem über NAND,

(b) das Circuit Value Problem über $\{\wedge, \oplus, 1\}$.

Aufgabe 2

Konstruieren Sie für folgende Funktionen $\{\wedge, \oplus, \vee\}$-Schaltkreise, jeweils einen von möglichst geringer Größe und einen von möglichst geringer Tiefe.

1. Lexikographischer Vergleich:
   $f_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 1 \quad$ gdw. $\quad \sum_{i=1}^n x_i 2^i < \sum_{i=1}^n y_i 2^i$,

2. Schwellenfunktion:
   $f_n^t(x_1, \ldots, x_n) = 1 \quad$ gdw. $\quad \sum_{i=1}^n x_i > t$.

Aufgabe 3

Eine Sprache L heißt *p-selektiv*, wenn es eine polynomial berechenbare Funktion f gibt, so dass für alle x und y gilt:

1. $f(x, y) \in \{x, y\}$

2. Wenn $x \in L$ oder $y \in L$, dann gilt $f(x, y) \in L$.

Zeigen Sie, dass jede p-selektive Sprache durch eine Schaltkreisfamilie mit polynomialer Größe entschieden werden kann.
Hinweis: Es reicht aus, kommutative Funktionen f zu betrachten. Sei weiterhin $L_n = L \cap \Sigma^n$. Zeigen Sie, dass es für jedes n eine Sprache $L' \subseteq L_n$ mit $|L'| \leq n + 1$ gibt, so dass für alle x gilt:

$$x \in L_n \quad \text{gdw} \quad \text{es existiert } y \in L', \text{ so dass } f(x, y) = x.$$

Betrachten Sie dazu den Turniergraphen (L_n, E_f) mit $E_f = \{(x, y) \in L_n \times L_n \ : \ f(x, y) = x\}$.