

Aufgabe 4

Wir betrachten im Folgenden CTL wie in der Vorlesung Mathematische Logik definiert (d. h. mit Pfadquantoren E und A , sowie den temporalen Operatoren X (*next*) und U (*until*), wobei die temporalen Operatoren nur in Kombination mit einem Pfadquantor auftreten dürfen).

Sei R (*release*) ein weiterer temporaler Operator mit folgender Semantik: $\mathcal{K}, v \models E(\varphi R\psi)$ gdw. ein Pfad $v = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n, \dots$ existiert, so dass $\mathcal{K}, v_i \models \psi$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt oder ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mathcal{K}, v_n \models \varphi$ und $\mathcal{K}, v_i \models \psi$ für alle $i < n$ (analog für $A(\varphi R\psi)$).

- (a) Zeigen Sie, dass CTL(R) (also CTL erweitert um den Release Operator) die gleiche Ausdruckstärke hat wie CTL.

Es reicht, den R-Operator in CTL auszudrücken. Betrachte dazu die folgende Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}, v \models \neg E(\varphi R\psi) \\ \Leftrightarrow & \text{ auf allen Pfaden } \pi = \pi(0)\pi(1) \dots \text{ gilt:} \\ & \text{ex. } n \in \mathbb{N} \mathcal{K}, \pi(n) \models \neg\psi \wedge \neg\varphi \text{ und } \mathcal{K}, \pi(i) \models \neg\varphi \text{ für alle } i < n \\ \Leftrightarrow & \mathcal{K}, v \models A(\neg\varphi U(\neg\psi \wedge \neg\varphi)) \end{aligned}$$

Es gilt also $E(\varphi R\psi) \equiv \neg A(\neg\varphi U(\neg\psi \wedge \neg\varphi))$ und analog $A(\varphi R\psi) \equiv \neg E(\neg\varphi U(\neg\psi \wedge \neg\varphi))$.

Umgekehrt lässt sich auch der U-Operator durch den R-Operator ausdrücken. Betrachte dazu die folgende Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}, v \models \neg E(\varphi U\psi) \\ \Leftrightarrow & \text{ auf allen Pfaden } \pi = \pi(0)\pi(1) \dots \text{ gilt:} \\ & \mathcal{K}, \pi(n) \models \neg\psi \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ oder} \\ & \text{ex. } n \in \mathbb{N} \mathcal{K}, \pi(n) \models \neg\psi \wedge \neg\varphi \text{ und } \mathcal{K}, \pi(i) \models \neg\psi \text{ für alle } i < n \\ \Leftrightarrow & \mathcal{K}, v \models A((\neg\psi \wedge \neg\varphi)R\neg\psi) \end{aligned}$$

Es gilt also $E(\varphi U\psi) \equiv \neg A((\neg\psi \wedge \neg\varphi)R\neg\psi)$ und analog $A(\varphi U\psi) \equiv \neg E((\neg\psi \wedge \neg\varphi)R\neg\psi)$.

- (b) Zeigen Sie, dass CTL(R)-Formeln in Negationsnormalform transformiert werden können.

Durch wiederholte Anwendung der folgenden Regeln kann jede CTL(R)-Formel in Negationsnormalform überführt werden:

$$\begin{array}{ll} \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi & \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi \\ \neg\neg\varphi \equiv \varphi & \\ \neg EX\varphi \equiv AX\neg\varphi & \neg AX\varphi \equiv EX\neg\varphi \\ \neg E(\varphi U\psi) \equiv A((\neg\psi \wedge \neg\varphi)R\neg\psi) & \neg A(\varphi U\psi) \equiv E((\neg\psi \wedge \neg\varphi)R\neg\psi) \\ \neg E(\varphi R\psi) \equiv A(\neg\varphi U(\neg\psi \wedge \neg\varphi)) & \neg A(\varphi R\psi) \equiv E(\neg\varphi U(\neg\psi \wedge \neg\varphi)) \end{array}$$