

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob folgende Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar sind:

- (i) $(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \vee Y)$,
- (ii) $(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow Y$,
- (iii) $(X \wedge \neg Y) \rightarrow \neg(X \wedge Y)$,
- (iv) $(\neg X \wedge (X \vee Y)) \leftrightarrow (X \vee \neg Y)$.

Lösung:

- (i) $(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \vee Y) \equiv (X \wedge \neg Y) \vee \neg X \vee Y =: \varphi_1$

X	Y	$X \wedge \neg Y$	$\neg X$	φ_1
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1

φ_1 ist eine Tautologie und damit erfüllbar.

- (ii) $\varphi_2 := (X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow Y$

X	Y	$X \leftrightarrow Y$	φ_2
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

φ_2 ist erfüllbar, aber keine Tautologie.

- (iii) $\varphi_3 := (X \wedge \neg Y) \rightarrow \neg(X \wedge Y)$

$$\begin{aligned} &\equiv \neg(X \wedge \neg Y) \vee \neg X \vee \neg Y \\ &\equiv \neg X \vee Y \vee \neg X \vee \neg Y \\ &\equiv \neg X \vee (Y \vee \neg Y) \\ &\equiv \neg X \vee 1 \\ &\equiv 1 \end{aligned}$$

φ_3 ist eine Tautologie und damit erfüllbar.

Anderer Ansatz

1. Fall $\llbracket Y \rrbracket^{\mathcal{J}} = 0$. Dann ist die zweite Klammer gleich 0:
 $\llbracket (X \wedge Y) \rrbracket^{\mathcal{J}} = 0$, also $\llbracket \neg(X \wedge Y) \rrbracket^{\mathcal{J}} = 1$ und $\llbracket \varphi_3 \rrbracket^{\mathcal{J}} = 1$.
2. Fall $\llbracket Y \rrbracket^{\mathcal{J}} = 1$. Dann ist die erste Klammer gleich 0:
 $\llbracket (X \wedge \neg Y) \rrbracket^{\mathcal{J}} = 0$ und wieder $\llbracket \varphi_3 \rrbracket^{\mathcal{J}} = 1$.

(iv) $\varphi_4 := (\neg X \wedge (X \vee Y)) \leftrightarrow (X \vee \neg Y)$

X	Y	$\neg X \wedge (X \vee Y)$	$X \vee \neg Y$	φ_4
0	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	0

φ_4 ist unerfüllbar und damit keine Tautologie.