

Aufgabe 1

Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) Wenn $\Phi \models \varphi$, dann $\Psi \models \varphi$ für jede Formelmenge Ψ mit $\Psi \subseteq \Phi$.
- (b) $\{\psi, \varphi\} \models \varphi \wedge \psi$
- (c) Wenn $\Phi \cup \{\psi\} \models \varphi$ und $\Phi \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$, dann gilt bereits $\Phi \models \varphi$.
- (d) Wenn $\Phi \models \psi$, dann existiert eine endliche Teilmenge Φ_0 von Φ , so dass $\{\psi\} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi_0$.
- (e) Wenn $\varphi_0 \rightarrow \vartheta$ und $\varphi_1 \rightarrow \neg\vartheta$ Tautologien sind, dann gilt $\{\varphi_0, \varphi_1\} \models \psi$ für jedes $\psi \in \text{AL}$.
- (f) Wenn $\Phi \models \psi$ für alle $\psi \in \Psi$ und $\Psi \models \varphi$, dann auch $\Phi \models \varphi$.

Lösung:

- (a) FALSCH. Sei $\Phi = \{X\}$, $\varphi = X$, $\Psi = \emptyset$. Dann gilt $\Phi \models \varphi$, $\Psi \subseteq \Phi$, aber $\Psi \not\models \varphi$, weil z.B. $\mathcal{J} : \{X\} \mapsto \{0, 1\}$ mit $\mathcal{J}(X) = 0$ ein Gegenbeispiel ist.
- (b) WAHR. Sei $\mathcal{J} \models \varphi$ und $\mathcal{J} \models \psi$, dann $\mathcal{J} \models \varphi \wedge \psi$.
- (c) WAHR. Sei $\mathcal{J} \models \Phi$. Ist $\mathcal{J} \models \psi$, so folgt $\mathcal{J} \models \varphi$, weil $\Phi \cup \{\psi\} \models \varphi$. Ist $\mathcal{J} \models \neg\psi$, so folgt $\mathcal{J} \models \varphi$, weil $\Phi \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$.
- (d) WAHR. Es gelte $\Phi \models \psi$. Die leere Menge $\Phi_0 = \emptyset$ ist Teilmenge von Φ und es gilt trivialerweise, dass $\{\psi\} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \emptyset$.
- (e) WAHR. Es reicht zu zeigen, dass $\Phi := \{\varphi_0, \varphi_1\}$ unerfüllbar ist. Angenommen, es existiert ein Modell \mathcal{J} von Φ . Da $\varphi_0 \rightarrow \vartheta$ eine Tautologie ist, gilt $\mathcal{J} \models \vartheta$. Da $\varphi_1 \rightarrow \neg\vartheta$ eine Tautologie ist, gilt $\mathcal{J} \models \neg\vartheta$. Widerspruch, also existiert kein Modell von Φ .
- (f) WAHR. Sei $\mathcal{J} \models \Phi$. Dann gilt nach Voraussetzung $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in \Psi$, also nach Definition der Modellbeziehung ist $\mathcal{J} \models \Psi$. Dann ist nach Voraussetzung $\mathcal{J} \models \varphi$.

Aufgabe 4

Seien Φ und Θ zwei Formelmengen. Wir sagen, dass Θ aus Φ folgt ($\Phi \models \Theta$), wenn jede Formel $\vartheta \in \Theta$ aus Φ folgt. Sei $(\Phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine unendliche Folge von erfüllbaren Formelmengen $\Phi_i \subseteq \text{AL}$, so dass $\Phi_{i+1} \models \Phi_i$ und $\Phi_i \not\models \Phi_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Sei Ψ eine erfüllbare Formelmenge, so dass $\Psi \models \Phi_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge Ψ existiert.
- (b) Zeigen Sie, dass keine endliche Formelmenge Θ existiert, so dass $\Psi \models \Theta$ und $\Theta \models \Psi$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass eine Folge $(\Phi'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ existiert, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ die Formelmengen Φ'_i und Φ_i die gleichen Modelle haben und Folgendes gilt: $\Phi'_{i+1} \models \Phi'_i$, $\Phi'_i \not\models \Phi'_{i+1}$ und $\Phi'_i \subset \Phi'_{i+1}$.

Lösung:

- (a) Setze $\Psi := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_i$. Dann ist Ψ erfüllbar. Sonst gäbe es eine endliche unerfüllbare Teilmenge Ψ_0 von Ψ . Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\Psi_0 \subseteq \bigcup_{i \leq n} \Phi_i$, also ist $\bigcup_{i \leq n} \Phi_i$ auch unerfüllbar. Aber es ist $\Phi_n \models \bigcup_{i \leq n} \Phi_i$ und Φ_n ist damit auch unerfüllbar. Es folgt $\Phi_n \models \Phi_{n+1}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

(b) Die Aussage gilt nicht. Wir geben ein Gegenbeispiel. Sei $\Phi_0 := \{X_0 \vee X_1\}$ und für $i > 0$ sei $\Phi_i := \Phi_{i-1} \cup \{X_i \rightarrow X_{i+1}\}$. Dann sind alle Φ_i erfüllbar und es gilt $\Phi_{i+1} \models \Phi_i$, da $\Phi_i \subseteq \Phi_{i+1}$. Weiterhin haben wir $\Phi_i \not\models \Phi_{i+1}$, weil die Interpretation \mathcal{I} , die alle vorkommenden Variablen auf 1 setzt, außer X_{i+1} , die auf 0 gesetzt wird, die Formelmengen trennt.

Sei $\vartheta := X_0 \wedge \neg X_1$ und sei $\Psi := \{\vartheta\}$. Dann ist $\{\vartheta\} \models \Phi_i$ für jedes i . Sei nämlich $\mathcal{I} \models \vartheta$. Dann ist $\mathcal{I}(X_0) = 1$ und $\mathcal{I}(X_1) = 0$. Damit werden auch alle Formeln $X_1 \rightarrow Y$ für $Y \in \{X_2, X_3, \dots\}$ erfüllt, also ist $\mathcal{I} \models \Phi_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 1. Die Intention bei der Aufgabestellung war es, in dieser Teilaufgabe zu zeigen, dass es keine endliche Menge Θ gibt, so dass $\Psi \models \Theta$ und $\Theta \models \Psi$ gilt für die Menge $\Psi = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_i$ aus der Teilaufgabe (a). Dies kann wie folgt bewiesen werden. Angenommen, es existiere so ein endliches Θ . Betrachte $\vartheta := \bigwedge \Theta := \bigwedge_{\varphi \in \Theta} \varphi$. Es ist klar, dass ϑ und Θ die gleichen Modelle haben, also gilt $\Psi \models \vartheta$ (und $\vartheta \models \Psi$). Nach dem Kompaktheitssatz gibt es eine endliche Teilmenge Ψ_0 von $\Psi = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_i$ mit $\Psi_0 \models \vartheta$. Mit der Konstruktion aus dem Hinweis ($\Phi'_0 := \Phi_0$ und für $i > 0$ setze $\Phi_i := \bigcup_{j < i} \Phi'_j \cup \Phi_i$) können wir annehmen, dass die Folge $(\Phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bezüglich der Inklusion der Mengen monoton aufsteigend ist. Also existiert eine Zahl n , so dass $\Phi_n \models \vartheta$ gilt. Da $\vartheta \models \Psi$ gilt, haben wir $\vartheta \models \Phi_{n+1}$ und es ist $\Phi_n \not\models \Phi_{n+1}$, was der Voraussetzung widerspricht. Also gibt es keine endliche Menge Θ mit $\Psi \models \Theta$ und $\Theta \models \Psi$.

Bemerkung 2. Man kann den gleichen Beweis durchführen, ohne eine *monotone* Folge von Formelmengen zu konstruieren. Diese Konstruktion dient lediglich einer klareren Vorstellung dessen, wie solche Folgen aufgebaut sind.