

## Musterlösung zu Übung 4 Aufgaben 1 und 4

### Aufgabe 1

(a) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$\begin{aligned} & (\neg X \vee Z \vee Y) \wedge (\neg Z \vee Y \vee \neg X) \\ & \wedge (Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Z) \wedge (\neg Y \vee Z \vee X) \\ & \wedge (\neg Y \vee \neg X) \wedge (\neg Y \vee Z \vee \neg X). \end{aligned}$$

(b) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel allgemeingültig ist:

$$(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Z) \vee (Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y).$$

(c) Beweisen Sie die folgende semantische Folgerung an Hand der Resolutionsmethode:

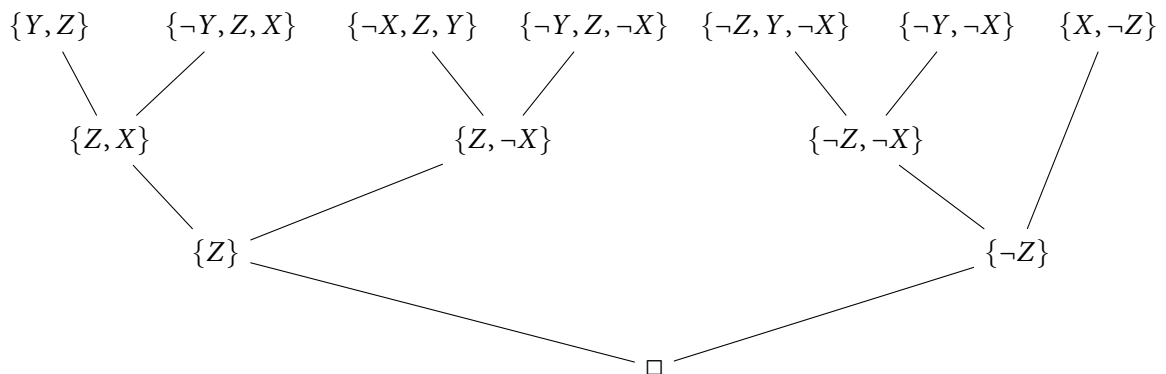
$$\{X \vee Y \vee \neg V, V \vee X \vee Z, V \vee \neg Y \vee Z, Z \vee \neg Y \vee K, \neg Z \vee K, \neg X\} \models K \wedge \neg X.$$

*Lösung:*

(a) Die Klauselmenge der Formel ist

$$\{\{Y, Z\}, \{\neg Y, Z, X\}, \{\neg X, Z, Y\}, \{\neg Y, Z, \neg X\}, \{\neg Z, Y, \neg X\}, \{\neg Y, \neg X\}, \{X, \neg Z\}\}.$$

Die Resolution liefert:



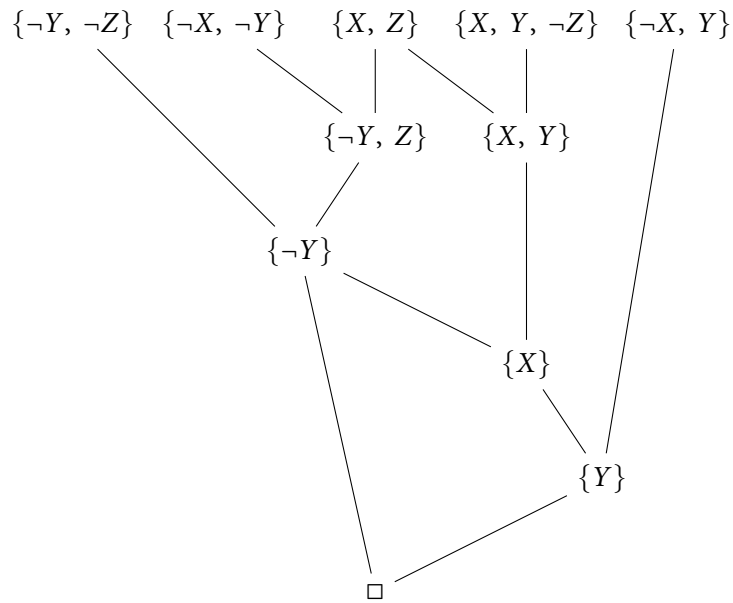
Die leere Klausel ist ableitbar, also ist die Formel unerfüllbar.

(b) Eine Formel ist allgemeingültig genau dann, wenn ihre Negation unerfüllbar ist. Wir bilden die Negation der gegebenen Formel (diese heiÙe  $\varphi$ ) und prüfen mit der Resolutionsmethode, ob  $\varphi$  unerfüllbar ist. Die Negation  $\neg\varphi$  ist äquivalent zu

$$\neg\varphi \equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y).$$

Die Klauselmenge von  $\neg\varphi$  ist somit  $\{\{\neg X, \neg Y\}, \{X, Y, \neg Z\}, \{X, Z\}, \{\neg Y, \neg Z\}, \{\neg X, Y\}\}$ .

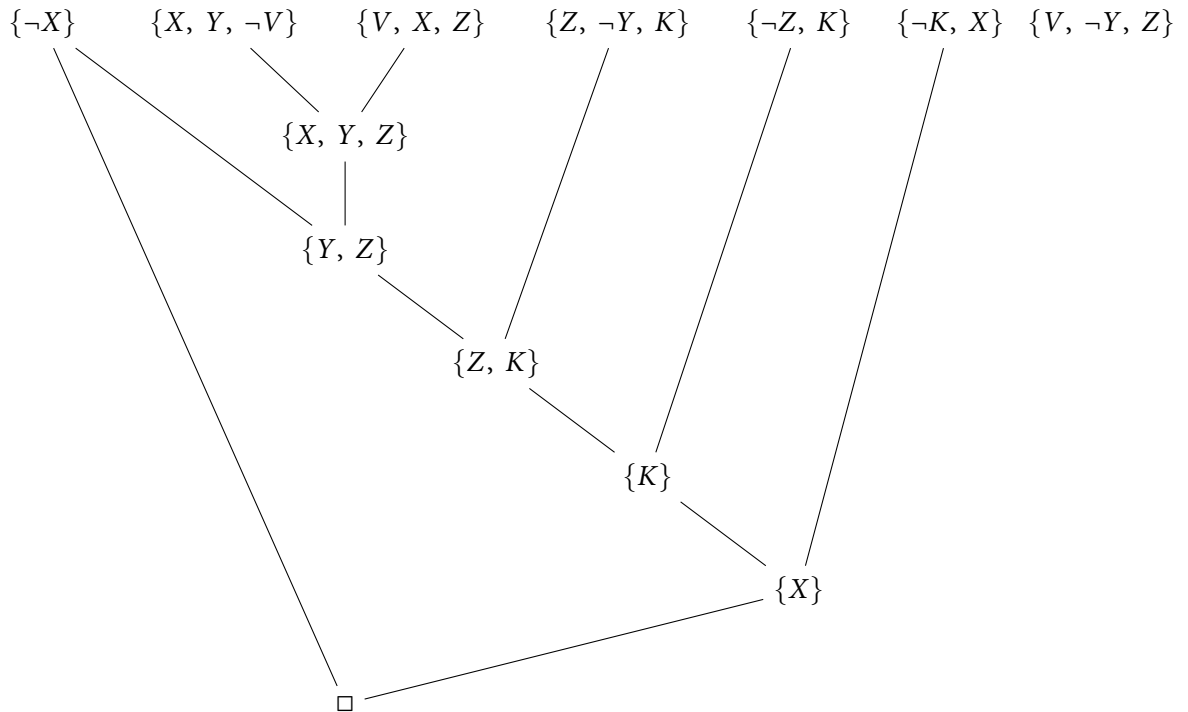
Die Resolution liefert:



Da wir die leere Klausel abgeleitet haben, ist  $\neg\varphi$  unerfüllbar, also ist  $\varphi$  allgemeingültig

- (c) Sei  $\Phi := \{X \vee Y \vee \neg V, V \vee X \vee Z, V \vee \neg Y \vee Z, Z \vee \neg Y \vee K, \neg Z \vee K, \neg X\}$ . Dann ist  $\Phi \models K \wedge \neg X$  genau dann, wenn  $\Phi \cup \{\neg K \vee X\}$  unerfüllbar ist. Dies prüfen mit der Resolutionsmethode. Die Menge der Klauseln ist  $\Phi \cup \{\neg K \vee X\}$ .

Die Resolution liefert:



#### Aufgabe 4

Welche der folgenden Sequenzen sind gültig?

- (a)  $(X \vee Y), (X \rightarrow (Y \wedge Z)) \Rightarrow Y, \neg Z$ ;
- (b)  $(X \rightarrow Z), (Y \rightarrow Z) \Rightarrow X, Y, \neg Z$ .

Überprüfen Sie durch geeignete Anwendung der Resolutionsmethode, ob folgende Sequenz gültig ist:

- (c)  $((\neg X \wedge Y) \rightarrow \neg Z), (Y \rightarrow Z) \Rightarrow (\neg X \vee \neg Y) \rightarrow Z$ .

*Lösung:*

- (a) Die Sequenz ist gültig. Sei  $\mathcal{I}$  eine Interpretation mit  $\mathcal{I} \models \{(X \vee Y), (X \rightarrow (Y \wedge Z))\}$ . Wenn  $\mathcal{I}(Y) = 1$  gilt, ist eine Formel im Sukzedens erfüllt. Nehmen wir nun an, dass  $\mathcal{I}(Y) = 0$  ist. Dann ist  $\mathcal{I}(X) = 1$  (wegen  $X \vee Y$ ). Dann ist  $\mathcal{I}(Y \wedge Z) = 1$  (wegen  $X \rightarrow (Y \wedge Z)$ ) und wir haben wieder  $\mathcal{I}(Y) = 1$ .
- (b) Die Sequenz ist nicht gültig. Sei  $\mathcal{I}$  eine Interpretation mit  $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(Y) = 0$  und  $\mathcal{I}(Z) = 1$ . Dann ist  $\mathcal{I} \models \{X \rightarrow Z, Y \rightarrow Z\}$ , aber  $\llbracket X \rrbracket^{\mathcal{I}} = \llbracket Y \rrbracket^{\mathcal{I}} = \llbracket \neg Z \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0$ .
- (c) Die Sequenz  $(\neg X \wedge Y \rightarrow \neg Z), (Y \rightarrow Z) \Rightarrow (\neg X \vee \neg Y) \rightarrow Z$  ist gültig genau dann, wenn es keine Interpretation  $\mathcal{I}$  gibt, welche die Antezedens erfüllt, aber die Sukzedens nicht. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\varphi := (\neg X \wedge Y \rightarrow \neg Z) \wedge (Y \rightarrow Z) \wedge \neg((\neg X \vee \neg Y) \rightarrow Z)$$

unerfüllbar ist. Wir bringen  $\varphi$  in KNF:

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg Y \vee Z) \wedge \neg((X \wedge Y) \vee Z) \\ &\equiv (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg Y \vee Z) \wedge ((\neg X \vee \neg Y) \wedge \neg Z) \\ &\equiv (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge \neg Z.\end{aligned}$$

Die Klauselmenge ist  $\{\{X, \neg Y, \neg Z\}, \{\neg Y, Z\}, \{\neg X, \neg Y\}, \{\neg Z\}\}$ . Nach Aufgabe 2 (b) ist diese Klauselmenge erfüllbar genau dann, wenn  $\{\{\neg Z\}\}$  erfüllbar ist:  $Y$  kommt in den anderen Klauseln  $Y$  negativ vor und nirgendwo positiv. Offensichtlich ist  $\{\{\neg Z\}\}$  erfüllbar, also ist die gegebene Sequenz nicht gültig.