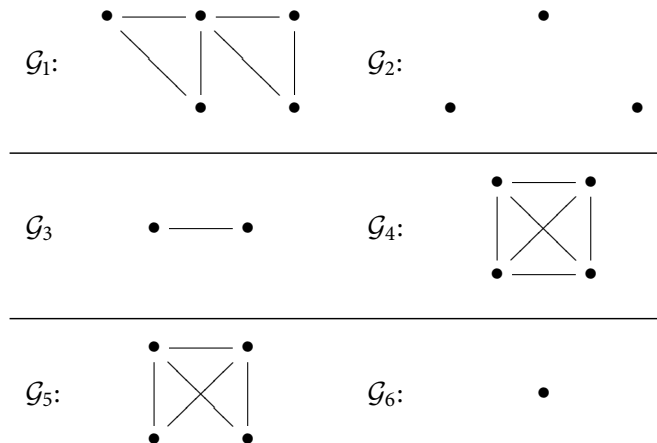


Musterlösung zu Übung 6

Aufgaben 2 — 4

Aufgabe 2

Wir betrachten folgende Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$:



Bestimmen Sie, in welchen dieser Graphen folgende Sätze jeweils gelten:

$$\varphi_1 := \exists x_0 \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 = x_3);$$

$$\varphi_2 := \forall x \exists y (x = y);$$

$$\varphi_3 := \exists x \exists y \forall z (\neg(x = z) \wedge \neg(y = z) \rightarrow Exz \wedge Eyz);$$

$$\varphi_4 := \forall x \forall y \forall z (Exy \vee Exz \vee Eyz).$$

Lösung:

- φ_1 gilt in allen Graphen.
- φ_2 gilt auch in allen Graphen. Man wähle für y den selben Knoten wie für x .
- φ_3 gilt in \mathcal{G}_1 (man wähle als x und y den oberen mittleren Knoten), in \mathcal{G}_3 (z.B. kann man als x einen und als y den anderen Knoten wählen), in \mathcal{G}_4 (jede Wahl passt), in \mathcal{G}_5 (etwa die beiden unteren Knoten als x und y) und in \mathcal{G}_6 (x und y sind der Knoten, für z kann man dann nichts wählen).
- φ_4 gilt in keiner der gegebenen Strukturen, da man als x , y und z einen und den selben Knoten wählen kann und dann keine der Beziehungen $E^{\mathcal{G}_i}(x, y)$, $E^{\mathcal{G}_i}(x, z)$, $E^{\mathcal{G}_i}(y, z)$ für $i = 1, \dots, 6$ gilt.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{K} := (S, E_a, E_b, P, Q)$ ein Transitionssystem. Geben Sie FO-Formeln an, welche ausdrücken, dass

- (a) x keinen b -Vorgänger hat, an dem gleichzeitig Q und P gelten;
- (b) es zwischen x und y einen b -Pfad der Länge höchstens 17 gibt, an dem überall P gilt;
- (c) von allen Zuständen, an denen $\neg P$ gilt, in maximal drei a -Schritten ein Zustand erreicht werden kann, an dem Q gilt.

Lösung:

(a) $\varphi_{(a)}(x) := \neg \exists y (E_b y x \wedge P y \wedge Q y)$;

(b) $\varphi_{(b)}(x, y) := (P x \wedge P y) \wedge ((x = y) \vee \exists x_1 \dots \exists x_{16} (\bigwedge_{i=1}^{16} P x_i \wedge (\bigwedge_{i=1}^{15} (E_b x_i x_{i+1} \vee x_i = x_{i+1})) \wedge E_b x x_1 \wedge E_b x_{16} y))$;

(c) $\varphi_{(c)} := \forall x (\neg P x \rightarrow \exists x_1 \exists x_2 \exists y (Q y \wedge (E_a x x_1 \vee x = x_1) \wedge (E_a x_1 x_2 \vee x_1 = x_2) \wedge (E_a x_2 y \vee x_2 = y)))$.

Aufgabe 4

Ein unendliches Wort über einem endlichen Alphabet Σ ist eine unendliche Folge $\alpha = \alpha(0)\alpha(1)\dots$, so dass $\alpha(i) \in \Sigma$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Menge aller unendlichen Wörter über Σ bezeichnen wir mit Σ^ω . Jedes $\alpha \in \Sigma^\omega$ kann durch die Wortstruktur $\mathfrak{W}_\alpha = (\mathbb{N}, <, (P_a)_{a \in \Sigma})$ kodiert werden, wobei $P_a = \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) = a\}$. Ein Satz $\varphi \in \text{FO}(\{<\} \cup \{P_a \mid a \in \Sigma\})$ definiert dann die ω -Sprache $L(\varphi) := \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \mathfrak{W}_\alpha \models \varphi\}$.

(a) Beschreiben Sie die durch folgende Sätze definierten ω -Sprachen über $\Sigma = \{a, b, c, d\}$:

(i) $\varphi_0 := \exists x \exists y (P_a x \wedge P_b y \wedge x < y)$;

(ii) $\varphi_1 := \exists x \forall y (x < y \rightarrow \neg P_a y)$.

(b) Geben Sie FO-Sätze an, welche folgende ω -Sprachen über $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ definieren:

(i) $\{(aab)^\omega\} = \{aabaab\dots\}$;

(ii) die Sprache der ω -Wörter über Σ , in denen auf jedes a unendlich viele b folgen.

Lösung:

(a) (i) Es gibt ein a und später im Wort ein b .

(ii) Es gibt nur endlich viele a im Wort.

(b) (i) Wir definieren zuerst

$$\varphi_0(x) := \forall y (\neg(x = y) \rightarrow x < y)$$

für die Aussage, dass x gleich Null ist, und

$$\varphi_{\text{next}}(x, y) := (x < y) \wedge \forall z (\neg(x < z \wedge z < y))$$

für $x + 1 = y$. Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_{(i)} &:= \exists x \left(\varphi_0(x) \wedge P_a x \wedge \exists y \left(\varphi_{\text{next}}(x, y) \wedge P_a y \wedge \exists z \left(\varphi_{\text{next}}(y, z) \wedge P_b z \right) \right) \right) \\ &\quad \wedge \forall x \exists y \exists z \exists u \left(P_b x \rightarrow \varphi_{\text{next}}(x, y) \wedge \varphi_{\text{next}}(y, z) \wedge \varphi_{\text{next}}(z, u) \wedge P_a y \wedge P_a z \wedge P_b u \right). \end{aligned}$$

Die erste Zeile beschreibt die ersten drei Buchstaben des Wortes und die zweite sagt aus, dass auf jedes b sofort aab folgt.

(ii)

$$\varphi_{(ii)} := \forall x \left(P_a x \rightarrow \exists y \left(P_b y \wedge x < y \wedge \forall z (y = z \vee y < z \rightarrow \exists u (P_b u \wedge z < u)) \right) \right).$$

Anderer Ansatz: Die Aussage ist äquivalent zu der Aussage „Es gibt kein a im Wort oder es gibt unendlich viele b im Wort“. Die entsprechende Formel ist $(\neg \exists x (P_a x)) \vee (\forall x \exists y (x < y \wedge P_b y))$.