Musterlösung zu Übung 7
Aufgaben 1 und 4

Aufgabe 1

Wir betrachten eine Expansion $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, R)$ der natürlichen Arithmetik mit einem einstelligen Relationssymbol R. Geben Sie zu folgenden Sachverhalten jeweils eine Formel in $\mathrm{FO}(\{+, \cdot, 0, 1, R\})$ an:

(a) $x + 1$ und $y + 1$ haben die gleichen Primfaktoren;

(b) die Primfaktorzerlegung von x enthält jede Primzahl höchstens ein Mal;

(c) die 17-te Ziffer der Binärdarstellung von x ist eine 0;

(d) $R^{\mathfrak{N}}$ ist unendlich;

(e) die Menge der geraden natürlichen Zahlen ist unendlich.

Lösung:

Wir definieren zuerst: $\varphi_{|}(x, y) := \exists z\,(x = y \cdot z)$,
$\varphi_{\mathrm{prim}}(x) := x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge \forall y(y \mid x \rightarrow y = 1 \vee y = x)$,
$\varphi_{<}(x, y) := \exists z(z \neq 0 \wedge x + z = y))$.
Wir schreiben auch $y \mid x$ anstatt $\varphi_{|}(x, y)$ und $x < y$ anstatt $\varphi_{<}(x, y)$.

(a) $\varphi_{\mathrm{a}}(x, y) := \forall z[\varphi_{\mathrm{prim}}(z) \rightarrow (z \mid (x + 1) \leftrightarrow z \mid (y + 1))]$.

(b) $\varphi_{\mathrm{b}}(x) := \neg\exists z(\varphi_{\mathrm{prim}}(z) \wedge z \cdot z \mid x)$.

(c) Sei $2^{16} := 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$ (16 Mal), wobei $2 := 1 + 1$ ist. Wir stellen x dar als

$$x = 2^{16} \cdot q + r$$

mit eindeutig definierten $q, r \geq 0$, $r < 2^{16}$. Dann ist die 17-te Ziffer der Binärdarstellung von x eine 0 genau dann, wenn q gerade ist (d.h. die Binärdarstellung von q endet mit 0). Also setzen wir

$$\varphi_{\mathrm{c}}(x) := \exists q \exists r\,(x = 2^{16} \cdot q + r \wedge r < 2^{16} \wedge 2 \mid q).$$

(d) $\varphi_{\mathrm{d}} := \forall x \exists y(Ry \wedge x < y)$.

(e) Die Aussage ist wahr, also z.B. $\varphi_{\mathrm{e}} := \forall x(x = x)$.

Aufgabe 4

Seien E und R zweistellige Relationssymbole und f ein zweistelliges Funktionssymbol. Formen Sie folgende Formeln in Negations- und Pränexnormalform um.

(a) $\varphi := \exists x[\forall y(Exz \wedge \neg Eyx) \rightarrow \forall y(Efxyz \wedge \forall zRxz)]$.

(b) $\psi := [\exists z \forall x(\exists y(Exy \wedge Eyz) \wedge \forall y \forall z(Eyz \vee Exz \rightarrow y = z)] \rightarrow \forall zExfyz$.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\varphi \quad &:= \quad \exists x[\forall y(Exz \wedge \neg Eyx) \to \forall y(Efxyz \wedge \forall z Rxz)] \\
\text{(in NNF bringen)} \quad &\equiv \quad \exists x[\exists y(\neg Exz \vee Eyx) \vee \forall y(Efxyz \wedge \forall z Rxz)] \\
\text{(bereinigen)} \quad &\equiv \quad \exists x[\exists y(\neg Exz \vee Eyx) \vee \forall y'(Efxy'z \wedge \forall z' Rxz')] \\
&\equiv \quad \exists x[\exists y(\neg Exz \vee Eyx) \vee \forall y' \forall z'(Efxy'z \wedge Rxz')] \\
&\equiv \quad \exists x \exists y \forall y' \forall z'(\neg Exz \vee Eyx \vee (Efxy'z \wedge Rxz')).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\psi \quad &:= \quad [\exists z \forall x(\exists y(Exy \wedge Eyz) \wedge \forall y \forall z(Eyz \vee Exz \to y = z))] \to \forall z Exfyz \\
\text{(in NNF bringen)} \quad &\equiv \quad \forall z \exists x(\forall y(\neg Exy \vee \neg Eyz) \vee \exists y \exists z((Eyz \vee Exz) \wedge y \neq z)) \vee \forall z Exfyz \\
\text{(bereinigen)} \quad &\equiv \quad \forall z \exists x'[\forall y'(\neg Ex'y' \vee \neg Ey'z) \vee \exists y'' \exists z'((Ey''z' \vee Ex'z') \wedge y'' \neq z')] \vee \forall z'' Exfyz'' \\
&\equiv \quad \forall z \exists x' \forall y' \exists y'' \exists z'[\neg Ex'y' \vee \neg Ey'z \vee ((Ey''z' \vee Ex'z') \wedge y'' \neq z')] \vee \forall z'' Exfyz'' \\
\text{(PNF)} \quad &\equiv \quad \forall z \exists x' \forall y' \exists y'' \exists z' \forall z'' \big([\neg Ex'y' \vee \neg Ey'z \vee ((Ey''z' \vee Ex'z') \wedge y'' \neq z')] \vee Exfyz''\big).
\end{aligned}$$