

Musterlösung zu Übung 9

Aufgaben 1 und 3

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{K} := (V, E_a, E_b, P, Q)$ ein Transitionssystem. Geben Sie Formeln in der Modallogik an, welche ausdrücken, dass

- (a) es einen b -Pfad der Länge höchstens 3 gibt, welcher an einem Zustand endet, wo P gilt, und in jedem Zustand des Pfades $\neg Q$ gilt,
- (b) alle Pfade der Länge 3, an denen überall P gilt, einen Zustand enthalten, an dem Q gilt;
- (c) auf allen Pfaden der Länge 3, die mit einem Zustand enden, an dem Q gilt, es einen Zustand gibt, auf dem P gilt.

Lösung:

Sei φ eine modallogische Formel. Wir verwenden folgende Abkürzungen:

- $\Box\varphi := [a]\varphi \wedge [b]\varphi$,
- $\Diamond\varphi := \langle a \rangle\varphi \vee \langle b \rangle\varphi$.

$$(a) \neg Q \wedge \left(P \vee \langle b \rangle \left(\neg Q \wedge \left(P \vee \langle b \rangle \left(\neg Q \wedge \left(P \vee \langle b \rangle \left(\neg Q \wedge P \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right);$$

$$(b) \neg \left(P \wedge \neg Q \wedge \Diamond \left(P \wedge \neg Q \wedge \Diamond \left(P \wedge \neg Q \wedge \Diamond \left(P \wedge \neg Q \right) \right) \right) \right);$$

$$(c) P \vee \left(\Box \left(P \vee \Box \left(P \vee \Box \left(P \vee \neg Q \right) \right) \right) \right).$$

Aufgabe 3

Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils eine äquivalente Formel der Modallogik an, oder beweisen Sie, dass eine solche nicht existiert:

- (i) $\varphi_1 := \exists y \forall z (Exy \wedge \neg Py \wedge (Eyz \rightarrow Pz))$;
- (ii) $\varphi_2 := \forall y (Exy \rightarrow Eyx)$;
- (iii) $\varphi_3 := Px \rightarrow \left(\forall y (Exy \rightarrow (\exists z (Ezy \wedge Pz)) \wedge (\exists z (Eyz \wedge Pz))) \right)$.

Lösung:

- (i) $\Diamond(\neg P \wedge \Box P)$;
- (ii) Es gibt keine zu φ_2 äquivalente Formel der Modallogik. In den Transitionssystemen \mathcal{T} und \mathcal{T}' aus Abbildung 1 sind v und v' bisimilar: $\mathcal{T}, v \sim \mathcal{T}', v'$ (es ist leicht zu sehen, dass Spieler II das entsprechende Bisimulationsspiel gewinnt), aber x erfüllt φ_2 und x' nicht: $\mathcal{T}, v \models \varphi_2$ und $\mathcal{T}', v' \not\models \varphi_2$.
- (iii) Man beachte, dass wenn Px erfüllt wird, dann auch das erste Konjunktionsglied in den großen Klammern: Man nehme x selbst als z . So kann die Formel reduziert werden zu $\varphi_3 \equiv Px \rightarrow \left(\forall y (Exy \rightarrow (\exists z (Eyz \wedge Pz))) \right)$. Für diese existiert eine äquivalente Formel in ML: $P \rightarrow \Box \Diamond P$.



Abbildung 1: Bisimilare Transitionssysteme.