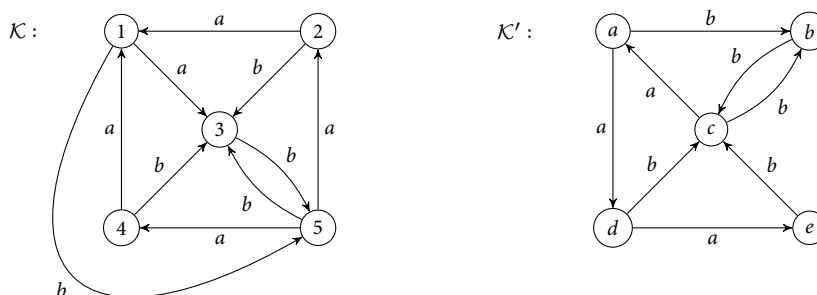


Musterlösung zu Übung 10

Aufgaben 1 — 3

Aufgabe 1

Wir betrachten folgende Transitionssysteme:



- (a) Bestimmen Sie eine maximale Bisimulation zwischen \mathcal{K} und \mathcal{K}' . Ermitteln Sie dazu alle Knotenpaare (u, v) aus $V_{\mathcal{K}} \times V_{\mathcal{K}'}$, so dass $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', v$ gilt. Geben Sie weiterhin für alle Paare, wo dies nicht der Fall ist, die größte Zahl m an, so dass $\mathcal{K}, u \sim_m \mathcal{K}', v$ gilt, und konstruieren Sie eine Modalformel φ der Modaltiefe $m + 1$ mit $\mathcal{K}, u \models \varphi$ und $\mathcal{K}, v \not\models \varphi$.
- (b) Geben Sie ein Transitionssystem \mathcal{K}'' mit minimaler Anzahl von Zuständen an, so dass $\mathcal{K}'', v \sim \mathcal{K}, 1$ für einen geeigneten Zustand v gilt.

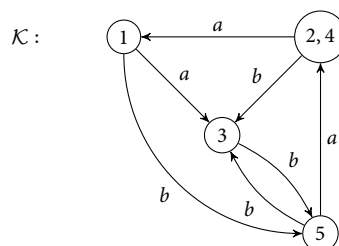
Lösung:

	a	b	c	d	e
1	$2 : \langle a \rangle [a] 0$	$1 : \langle a \rangle 1$	$2 : \langle a \rangle [a] 0$	\sim	$1 : \langle a \rangle 1$
2	\sim	$1 : \langle a \rangle 1$	$3 : \langle a \rangle \langle a \rangle [a] 0$	$2 : \langle a \rangle \langle a \rangle 1$	$1 : \langle a \rangle 1$
3	$1 : [a] 0$	\sim	$1 : [a] 0$	$1 : [a] 0$	\sim
4	\sim	$1 : \langle a \rangle 1$	$3 : \langle a \rangle \langle a \rangle [a] 0$	$2 : \langle b \rangle [a] 0$	$1 : \langle a \rangle 1$
5	$3 : \langle a \rangle \langle a \rangle \langle a \rangle 1$	$1 : \langle a \rangle 1$	\sim	$2 : \langle a \rangle \langle a \rangle 1$	$1 : \langle a \rangle 1$

Die Einträge \sim bezeichnen bisimilare Zustände. Die Einträge der Form " $x : \varphi$ " bezeichnen:

- $x = m + 1$ mit m aus der Aufgabestellung. Hier ist x die Modaltiefe einer trennenden Formel mit kleinster Modaltiefe;
- φ ist die trennende Formel.

- (b) Wir konstruieren zu \mathcal{K} ein Transitionssystem, in dem bisimilare Zustände 2 und 4, die in einer Zeile a vorkommen (und damit zu a , also auch zu einander bisimilar sind) zusammengefügt sind:



Wir prüfen jetzt, ob es bisimilare Zustände in dem neuen Transitionssystem gibt:

	1	2,4	3	5
1	—	—	—	—
2,4	$\langle a \rangle [a]0$	—	—	—
3	$\langle a \rangle 1$	$\langle a \rangle 1$	—	—
5	$\langle a \rangle [a]0$	$\langle a \rangle \langle a \rangle [a]1$	$[a]0$	—

Also gibt es keine nicht-bisimilare Zustände in dem Transitionssystem und es ist das gesuchte \mathcal{K}'' .
Als ν wählen wir 1.

Aufgabe 2

- (a) Geben Sie jeweils eine LTL-Formel ψ und eine FO-Formel $\varphi(x) \in \text{FO}(<, P, Q, R)$ an, so dass $\mathcal{W}, \nu_0 \models \psi$ bzw. $\mathcal{W} \models \varphi(\nu_0)$ genau dann gilt, wenn:
- \mathcal{W} ist unendlich;
 - Zwischen je einem Knoten, wo P gilt und einem Knoten, wo Q gilt, liegt immer ein Knoten, an dem R gilt;
 - es gibt unendlich viele Knoten, an denen P oder Q gilt, aber nur endlich viele, an denen sowohl P als auch Q gilt;

Hierbei bezeichnet ν_0 die erste Position im Wort \mathcal{W} .

- (b) Geben Sie jeweils eine CTL-Formel ψ an, so dass $\mathcal{K}, \nu \models \psi$ genau dann gilt, wenn:
- Auf jedem von ν ausgehenden Pfad kommen höchstens zwei Zustände vor, an denen P gilt;
 - auf jedem Pfad gibt es einen Zustand, von dem aus nur endlich viele Zustände erreichbar sind, an denen P gilt.

Lösung:

- (a) (i) \mathcal{W} ist unendlich:

GX1;

$$\forall x \exists y (x < y).$$

- (ii) Zwischen je einem Knoten, wo P gilt und einem Knoten, wo Q gilt, liegt immer ein Knoten, an dem R gilt:

$$G(P \rightarrow ((\neg Q)UR) \vee G\neg Q);$$

$$\forall x \forall y \left((x < y \vee x = y) \wedge (Px \wedge Qy) \rightarrow \exists z \left(Rz \wedge ((x < z) \vee (x = z)) \wedge (z < y \vee z = y) \right) \right).$$

- (iii) Es gibt unendlich viele Knoten, an denen P oder Q gilt, aber nur endlich viele, an denen sowohl P als auch Q gilt:

$$GF(P \vee Q) \wedge FG\neg(P \wedge Q);$$

$$\left(\exists x (Px \vee Qx) \right) \wedge \left(\forall x (Px \vee Qx \rightarrow \exists y (x < y \wedge (Py \vee Qy))) \right) \wedge \left(\exists x \forall y (x < y \rightarrow \neg (Py \wedge Qy)) \right).$$

Betrachten wir auch Transitionssysteme mit Terminalzuständen, so fügen wir zu der LTL-Formel GX1 hinzu.

- (b) Geben Sie jeweils eine CTL-Formel ψ an, so dass $\mathcal{K}, v \models \psi$ genau dann gilt, wenn:
- (i) Auf jedem von v ausgehenden Pfad kommen höchstens zwei Zustände vor, an denen P gilt:

$$AG(P \rightarrow AX(AG(P \rightarrow AXAG\neg P)))$$
 - (ii) auf jedem Pfad gibt es einen Zustand, von dem aus nur endlich viele Zustände erreichbar sind, an denen P gilt: $AFAG\neg P$

Aufgabe 3

Schreiben Sie MSO-Formeln, die folgende Sachverhalte über Transitionssysteme ausdrücken:

- (a) Der Graph, der dem Transitionssystem zu Grunde liegt, ist 3-färbbar.
- (b) Der Zustand y ist vom Zustand x via a -Transitionen erreichbar;
- (c) X ist eine Menge von Zuständen, die voneinander nicht erreichbar und von x erreichbar sind.

Lösung:

- (a) Der Graph, der dem Transitionssystem zu Grunde liegt, ist 3-färbbar:

$$\exists X_0 \exists X_1 \exists X_2 \left(\varphi_{\text{partition}}(X_0, X_1, X_2) \wedge \bigwedge_{i=0}^2 (\forall x \forall y (X_i x \wedge X_i y \rightarrow \neg E x y)) \right),$$

wobei $\varphi_{\text{partition}}(X_0, X_1, X_2) := \bigwedge_{0 \leq i < j \leq 2} \neg \exists x (X_i x \wedge X_j x) \wedge \forall x \bigvee_{i=0}^2 X_i x$.

Man beachte, dass wir in der Formel $\varphi_{\text{partition}}(X_0, X_1, X_2)$ nicht fordern, dass die Mengen nicht-leer sind.

- (b) X ist eine Menge von Zuständen, die voneinander nicht erreichbar und von x erreichbar sind:

$$\forall y (X y \rightarrow \varphi_{\text{reach}}(x, y)) \wedge \forall z \forall u (X z \wedge X u \wedge z \neq u \rightarrow \neg \varphi_{\text{reach}}(z, u) \wedge \neg \varphi_{\text{reach}}(u, z)), \text{ wobei } \varphi_{\text{reach}}$$

ähnlich wie in (b) definiert ist (mit beliebigen Kanten statt nur mit a -Kanten).