Musterlösung zu Übung 11
Aufgaben 1 — 5

Aufgabe 1

(a) Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller gerichteten Graphen (V, E) ohne Kreise gerader Länge.

  (i) Axiomatisieren Sie die Klasse $\mathcal{K}$.

  (ii) Zeigen Sie, dass die Klasse aller Graphen aus $\mathcal{K}$, in denen jeder Knoten, der keinen Vorgänger hat unendlich viele direkte Nachfolger hat, FO-axiomatisierbar ist. Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Ehrenfeucht-Fraïssé, dass diese Klasse nicht endlich axiomatisierbar ist.

(b)* Zeigen Sie, dass die Theorie der diskreten linearen Ordnungen ohne Endpunkte vollständig ist. Eine lineare Ordnung ist diskret, wenn jedes Element a, das Nachfolger (Vorgänger) hat, auch einen kleinsten (größten) Vorgänger (Nachfolger) b hat, d.h. für kein c gilt $a < c < b$ ($b < c < a$).

Lösung:

(a) (i)

$$\{\forall x_1 \dots \forall x_{2n} \Big(\big(\bigwedge_{1 \le i < j \le 2n} x_i \ne x_j \big) \to \neg (E x_{2n} x_1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{2n-1} E x_i x_{i+1}) \Big) \mid n > 0\}.$$

(ii) Folgende Formelmenge axiomatisiert die Klasse:

$$\{\forall x \Big(\neg \exists y (E y x) \to \exists x_1 \dots \exists x_n \big(\big(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \ne x_j \big) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} E x x_i \big) \Big) \mid n > 0\}.$$

Wäre die Klasse endlich axiomatisierbar, dann auch durch nur eine Formel φ (man bilde die Konjunktion aller Formeln der endlichen Menge, die die Klasse axiomatisiert). Sei $m = \mathrm{qr}(\varphi)$. Betrachte zwei Graphen:

$$\mathfrak{A} = (\{v\} \cup \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{(v, v_i) \mid i \in \mathbb{N}\})$$

und

$$\mathfrak{B} = (\{w\} \cup \{w_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{(w, w_i) \mid 0 < i < m\}).$$

Man beachte, dass $\mathfrak{A}$ zur gegebenen Klasse gehört und $\mathfrak{B}$ nicht, also muss gelten $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi$. Allerdings gewinnt die Duplikatorin das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Die Gewinnstrategie ist es auf v mit w, auf w mit v und auf v_i mit einem noch nicht ausgewählten w_j (bzw. auf w_j mit v_i) zu antworten. Es ist klar, dass die beschriebene Strategie eine Gewinnstrategie ist. Also kann die Formel φ die Strukturen nicht trennen, was ein Widerspruch zur Annahme ist, φ axiomatisiere die gegebene Klasse.

(b) Wir geben einen ähnlichen Beweis wie zum Satz 4.26 im Skript.

Sei T die Theorie der diskreten linearen Ordnungen ohne Endpunkte. Angenommen, T wäre nicht vollständig. Dann gibt es zwei diskrete lineare Ordnungen ohne Endpunkte $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, <^{\mathfrak{B}})$ mit $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Wir zeigen aber, dass die Duplikatorin das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $\mathrm{EF}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt, indem wir für sie eine Gewinnstrategie in jedem Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für beliebige m angeben.

Für x, y aus A oder aus B definieren wir $d(x, y)$ als die Anzahl von Elementen z mit $x < z < y$ (wobei $<$ für $<^{\mathfrak{A}}$ bzw. $<^{\mathfrak{B}}$ steht), falls die Anzahl endlich ist, und ∞ sonst. Für Zahlen $u, v \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $u =_n v$, wenn $u = v$ oder $u, v \ge n$.

Behauptung. Die Duplikatorin kann so spielen, dass für alle $i \leq m$ und alle nach i Zügen ausgewählten Elemente $a_1, \ldots, a_i \in A$ und $b_1, \ldots, b_i \in B$ gilt: $d(a_j, a_k) =_{2^{m-i+1}} d(b_j, b_k)$.

Für $i = 0, 1$ ist dies trivial. Wir nehmen an, die Behauptung sei nach i Schritten erfüllt und behandeln den Induktionsschritt durch Fallunterscheidung. Wir nehmen an, dass der Herausforderer im $(i+1)$-ten Zug ein Element $a_{i+1} \in A$ auswählt. Für den anderen Fall (dass er ein Element aus B wählt) ist der Beweis analog.

Wir unterscheiden drei Fälle.

(i) $a_{i+1} < a$ für alle bereits ausgewählten a. Seien a_l und b_l die jeweils kleinsten ausgewählten Elemente. Die Duplikatorin wählt b_{i+1} so, dass $b_{i+1} < b_l$ und $d(a_l, a_{i+1}) =_{2^{m-i+1}} d(b_l, b_{i+1})$. Dies ist immer möglich, da die Ordnung keine Endpunkte hat.

(ii) $a_{i+1} > a$ für alle bereits ausgewählten a. In diesem Fall spielt die Duplikatorin analog.

(iii) $a_l < a_{i+1} < a_k$, für bereits ausgewählte a_l und a_k, so dass es kein ausgewähltes a mit $a_l < a < a_{i+1}$ oder $a_{i+1} < a < a_k$ gibt. Da nach Induktionsvoraussetzung $d(a_l, a_k) =_{2^{m-i+1}} d(b_l, b_k)$ gilt, ist es möglich, b_{i+1} so zu wählen, dass $d(a_l, a_{i+1}) =_{2^{m-i}} d(b_l, b_{i+1})$ und $d(a_{i+1}, a_k) = 2^{m-i} d(b_{i+1}, b_k)$ ist.

Am Ende des Spiels (nach m Zügen) gilt also $d(a_l, a_k) =_2 d(b_l, b_k)$ für alle $l, k < m$, d.h.

$$a_l = a_k \Leftrightarrow b_l = b_k \text{ und } a_l < a_k \Leftrightarrow b_l < b_k.$$

Also ist die Abbildung $a_i \mapsto b_i$ für $1 \leq i \leq m$ ein lokaler Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, d.h. die Duplikatorin gewinnt das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Aufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Relationen in der jeweiligen Struktur elementar definierbar sind:

(a) die Menge der Primzahlen in $(\mathbb{N}, \cdot)$;

(b) die lexikographische Ordnung in $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, +, P_1, P_2)$, wobei $+$ die elementenweise Addition ist, $P_1 = \{(0, a) \mid a \in \mathbb{N}\}$ und $P_2 = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{N}\}$. Dabei ist die lexikographische Ordnung definiert als $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow (a < c)$ oder $(a = c$ und $b < d)$.

(c) die Menge der geraden Zahlen in $(\mathbb{N}, \cdot)$.

Lösung:

(a) Die Menge der Primzahlen ist definierbar: s. Übung 7, Aufgabe 1. Dabei ist zu beachten, dass die Konstanten 0 und 1 in der Struktur definierbar sind: $\varphi_0(x) := \forall y(y \cdot x = x)$ und $\varphi_1(x) := \forall y(y \cdot x = y)$.

(b) Die lexikographische Ordnung ist definierbar:

- $(a = c$ und $b < d)$ durch $\varphi_1\big((a, b), (c, d)\big) := \exists z\big(P_1 z \wedge \neg P_2 z \wedge (a, b) + z = (c, d)\big)$;
- $a = c$ durch $\varphi_2\big((a, b), (c, d)\big) := \exists z\Big(P_1 z \wedge \big((a, b) + z = (c, d) \vee (c, d) + z = (a, b)\big)\Big)$ und
- $a < c$ durch $\varphi_3\big((a, b), (c, d)\big) := \exists z\Big(P_2 z \wedge \varphi_2\big((a, b) + z, (c, d)\big)\Big)$.

Man beachte, dass (a, b) und (c, d) wie z *einzelne* Symbole bezeichnen. Nun ist die gesuchte Formel $\varphi(x, y) := \varphi_3(x, y) \vee \varphi_1(x, y)$.

(c) Die Menge der geraden Zahlen ist nicht definierbar in $(\mathbb{N}, \cdot)$. Folgende Abbildung f ist ein Automorphismus, der die gerade Zahl 2 auf die ungerade Zahl 3 abbildet. Wir stellen eine Zahl n als $n = 2^i \cdot 3^j \cdot m$ dar, wobei $i, j \in \mathbb{N}$ und m weder 2 noch 3 als Teiler hat. Man beachte, dass diese Darstellung immer existiert und für alle Zahlen außer 0 eindeutig ist. Daraus folgt, dass f wohldefiniert und injektiv ist.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; f(0) = 0, f(2^i \cdot 3^j \cdot m) = 2^j \cdot 3^i \cdot m.$$

Die Abbildung vertauscht also die Vielfachheit der Potenzen von 2 und 3 in der Primfaktorzerlegung einer Zahl. Um zu zeigen, dass f ein Automorphismus ist, müssen wir prüfen, dass f eine Bijektion ist (klar) und dass für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $a \cdot b = c$ gilt $f(a) \cdot f(b) = f(c)$.

Seien also $a = 2^{i_a} \cdot 3^{j_a} \cdot m_a$, $b = 2^{i_b} \cdot 3^{j_b} \cdot m_b$ und $c = 2^{i_c} \cdot 3^{j_c} \cdot m_c$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(a) \cdot f(b) &= f(2^{i_a} \cdot 3^{j_a} \cdot m_a) \cdot f(2^{i_b} \cdot 3^{j_b} \cdot m_b) \\
&= (2^{j_a} \cdot 3^{i_a} \cdot m_a) \cdot (2^{j_b} \cdot 3^{i_b} \cdot m_b) \\
&= (2^{j_a + j_b} \cdot 3^{i_a + i_b} \cdot m_a \cdot m_b) \\
&= f(2^{i_a + i_b} \cdot 3^{j_a + j_b} \cdot m_a \cdot m_b) \\
&= f(c).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Welche der folgenden Theorien sind vollständig ?

(a) die Theorie der (ungerichteten) Wälder;

(b) die Theorie der nicht-reflexiven dichten Ordnungen mit mindestens zwei Elementen (eine Ordnung $<$ ist dicht, wenn $x < y$ die Existenz eines z impliziert mit $x < z < y$);

(c) die Theorie der unendlichen Mengen.

Lösung:

(a) Die Theorie der (ungerichteten) Wälder ist nicht vollständig. Weder der Satz $\exists x \exists y (x \neq y)$ ist in der Theorie, noch seine Negation $\neg(\exists x \exists y (x \neq y))$.

(b) Die Theorie der nicht-reflexiven dichten Ordnungen mit mindestens zwei Elementen ist nicht vollständig. Weder der Satz $\exists x \forall y (x = y \vee y < x)$, der die Existenz eines maximalen Elementes ausdrückt, ist in der Theorie, noch seine Negation.

(c) Die Theorie der unendlichen Mengen T ist vollständig, was dazu äquivalent ist, dass für alle unendlichen Mengen $\mathfrak{A} = (A)$ und $\mathfrak{B} = (B)$ gilt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Es reicht eine Gewinnstrategie der Duplikatorin im Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $\mathrm{EF}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ anzugeben. In der Tat ist aber jede Strategie der Duplikatorin eine Gewinnstrategie.

Aufgabe 4*

(a) Zeigen Sie anhand von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein endlicher ungerichteter Zyklus $\mathfrak{C}_m = (C, E)$ existiert, so dass $\mathfrak{C}_m \equiv_m \mathfrak{P}$, wobei $\mathfrak{P} = (\mathbb{Z}, E)$ mit $E := \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |i - j| = 1\}$ einen unendlich langen ungerichteten Pfad bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass die Klasse aller ungerichteten Wälder nicht endlich axiomatisierbar ist.

Lösung:

(a) Wir geben wieder einen ähnlichen Beweis wie zum Satz 4.26 im Skript.

Sei m gegeben. Wir betrachten $\mathfrak{C} = (C, E)$ mit $C = \{1, \dots, 2^{m+1}\}$ und $E = \{(i, i+1) \mid i = 1, \dots, 2^{m+1}-1\} \cup \{(2^{m+1}, 1)\}$.

Für Knoten x, y eines zusamenhängenden Graphen definieren wir $d(x, y)$ als Länge des kürzesten Pfades zwischen x und y. Für Zahlen $u, v, n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $u =_n v$, wenn $u = v$ oder $u, v \geq n$.

Behauptung. Die Duplikatorin kann so spielen, dass für alle $i \leq m$ und alle nach i Zügen ausgewählten Elemente $a_1, \dots, a_i \in A$ und $b_1, \dots, b_i \in B$ gilt: $d(a_j, a_k) =_{2^{m-i+1}} d(b_j, b_k)$. Außerdem soll gelten: Ist b_l das kleinste und b_k das größte ausgewählte Element von $\mathbb{Z}$, so ist $d(a_l, a_k) \geq 2^{m-i+1}$.

Für $i = 0, 1$ ist dies trivial, für $i = 2$ ist es auch einfach. Wir nehmen an, die Behauptung sei nach $i > 2$ Schritten erfüllt und behandeln den Induktionsschritt durch Fallunterscheidung.

Wir unterscheiden folgende Fälle.

(i) Der Herausforderer wählt ein $b_{i+1} \in \mathbb{Z}$ mit $b_{i+1} > b_k$, wobei b_k das größte bereits ausgewählte Element in $\mathbb{Z}$ ist. (Der Fall $b_{i+1} < b$ für alle bereits ausgewählten b ist analog). Sei b_l das kleinste aus $\mathbb{Z}$ ausgewählte Element. Die Duplikatorin wählt a_{i+1} so, dass $d(a_k, a_{i+1}) =_{2^{m-i+1}} d(b_k, b_{i+1})$ und $d(a_l, a_{i+1}) \geq 2^{m-i}$.

(ii) b_l ist das kleinste ausgewählte Element in $\mathbb{Z}$ und b_k ist das größte davon; der Herausforderer wählt ein $a_{i+1} \in C$, so dass a_l und a_k die unter den ausgewählten am nächsten zu a_{i+1} liegenden Elemente sind. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass $\max(d(a_l, a_{i+1}), d(a_k, a_{i+1})) \geq 2^{m-i}$ ist. Sei $d(a_k, a_{i+1}) \geq 2^{m-i}$ (der andere Fall analog). Die Duplikatorin wählt b_{i+1} aus $\mathbb{Z}$ so, dass $d(b_l, b_{i+1}) =_{2^{m-i+1}} d(a_l, a_{i+1})$ und $b_{i+1} < b_l$, wobei $<$ die natürliche Ordnung auf $\mathbb{Z}$ ist.

(iii) Wählt der Herausforderer ein Element b_{i+1} aus $\mathbb{Z}$, das zwischen bereits ausgewählten Elementen b_l und b_k liegt (und keine anderen ausgewähleten Elemente dazwischen liegen), so wählt die Duplikatorin a_{i+1} so, dass a_{i+1} zwischen a_l und a_k liegt: auf dem kürzeren Pfad von a_l nach a_k und so, dass keine anderen ausgewähleten Elemente auf dem Pfad liegen. Dabei muss gelten: $d(a_l, a_{i+1}) = d(b_l, b_{i+1})$ und $d(a_{i+1}, a_k) = d(b_{i+1}, b_k)$.

(iv) Seien b_l das kleinste ausgewählte Element in $\mathbb{Z}$ und b_k das größte davon. Der Herausforderer wählt ein Element a_{i+1} aus C, so dass Folgendes gilt:
- a_{i+1} liegt auf dem kürzerem Pfad von a_l nach a_k;
- alle anderen aus C ausgewählten Elemente liegen auf dem kürzerem Pfad von a_l nach a_k.

Seien a_s und a_t die von den aus C ausgewählten Elementen zu a_{i+1} am nächsten liegenden Elemente, so dass a_{i+1} auf dem kürzeren Pfad von a_s nach a_t liegt. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass die Anzahl der Elemente zwischen a_l und a_s kleiner ist als die Anzahl der Elemente zwischen a_l und a_t. Dann wählt die Duplikatorin b_{i+1} so, dass $b_s < b_{i+1} < b_t$, $d(a_{i+1}, a_s) = d(b_{i+1}, b_s)$ und $d(a_{i+1}, a_t) = d(b_{i+1}, b_t)$ gilt.

Am Ende des Spiels (nach m Zügen) gilt $d(a_l, a_k) =_2 d(b_l, b_k)$ für alle $l, k < m$, d.h.

$$a_l = a_k \Leftrightarrow b_l = b_k \text{ und } (a_l, a_k) \in E \Leftrightarrow (b_l, b_k) \in E.$$

Also ist die Abbildung $a_i \mapsto b_i$ für $1 \leq i \leq m$ ein lokaler Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, d.h. die Duplikatorin gewinnt das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(b) Folgt aus (a).