

Musterlösung zu Übung 12

Aufgaben 1 — 5

Aufgabe 1

Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar, welche endlich axiomatisierbar? Beweisen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein (endliches) Axiomensystem an.

- (a) Die Klasse aller unendlichen linearen Ordnungen;
- (b) Die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen;
- (c) Die Klasse aller endlichen dichten linearen Ordnungen;
- (d) Die Klasse aller Graphen, die einen zu $(\text{Pot}(\mathbb{N}), \subseteq)$ isomorphen Subgraphen enthalten;

Lösung:

- (a) Wir bezeichnen die Klasse mit \mathcal{K} . Eine unendliche Axiomatisierung ist z.B. $\Phi_{\text{lin}} \cup \Phi_{\infty}$ wie in der Vorlesung definiert. Eine endliche Axiomatisierung existiert nicht. Angenommen, ein Satz φ mit $m = \text{qr}(\varphi)$ axiomatisiert \mathcal{K} . Betrachte zwei lineare Ordnungen $\mathfrak{A} = (\{1, \dots, 2^{m+1}\}, <^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2, <^{\mathfrak{B}})$, wobei $<^{\mathfrak{B}}$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned}
 a < b &\Leftrightarrow a \in \mathbb{N}_1 \text{ und } b \in \mathbb{N}_2 \text{ oder} \\
 &a \in \mathbb{N}_1 \text{ und } b \in \mathbb{N}_1 \text{ und } a < b \text{ oder} \\
 &a \in \mathbb{N}_2 \text{ und } b \in \mathbb{N}_2 \text{ und } b < a.
 \end{aligned}$$

$\mathfrak{A}:$	$\mathfrak{B}:$
$0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots$	$0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad \dots \quad 2 \quad 1 \quad 0$

Wir zeigen, dass die Duplikatorin eine Gewinnstrategie im Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat. Wir definieren $d(x, y)$ als die Anzahl der Elemente (möglicherweise ∞), die sich zwischen x und y befinden. Für Zahlen $u, v \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $u =_n v$, wenn $u = v$ oder $u, v \geq n$. Um die Endpunkte zu berücksichtigen und die Argumentation zu vereinfachen, erlauben wir dem Herausforderer, in zwei zusätzlichen Zügen (die wir nicht zählen) die Endpunkte zu wählen, worauf die Duplikatorin mit Endpunkten antwortet.

Behauptung. Die Duplikatorin kann folgende Bedingung nach dem i -ten Schritt erfüllen, wobei die Elemente $a_1, \dots, a_i \in A$ und $b_1, \dots, b_i \in B$ ausgewählt sind: für $1 \leq l, k \leq i$ ist

$$a_l < a_k \rightarrow b_l < b_k \text{ und } d(a_l, a_k) =_{2^{m-i+1}} d(b_l, b_k).$$

Für $i = 0$ ist die Behauptung trivial. Für $m > 0$ nehmen wir an, dass der Herausforderer ein $a_{i+1} \in A$ wählt (sonst ist der Beweis analog). Seien a_l und a_k die nächsten Nachbarn von a_{i+1} mit $a_l < a_{i+1} < a_k$. Dann wählt die Duplikatorin ein b_{i+1} , so dass b_l und b_k die nächsten Nachbarn von b_{i+1} sind und $b_l < b_{i+1} < b_k$, $d(a_l, a_{i+1}) =_{2^{m-i}} d(b_l, b_{i+1})$ und $d(a_{i+1}, a_k) =_{2^{m-i}} d(b_{i+1}, b_k)$ gilt.

Am Ende des Spiels gilt dann $a_l < a_k \Leftrightarrow b_l < b_k$, also ist $a_1, \dots, a_m \mapsto b_1, \dots, b_m$ ein partieller Isomorphismus und die Duplikatorin gewinnt das Spiel. Da $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, aber $\mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$, ergibt sich ein Widerspruch.

- (b) Ein Axiomensystem hätte beliebig große endliche Modelle, also auch ein unendliches Modell und kann deswegen die Klasse nicht axiomatisieren.

- (c) Die Klasse enthält genau eine Struktur: die Ordnung mit nur einem Element. Sie ist also endlich axiomatisierbar: $\forall x(\neg x < x) \wedge \forall x \forall y(x = y)$.
- (d) Wäre Φ ein Axiomensystem für die Klasse, so hätte die axiomatisierte Klasse nach dem absteigenden Satz von Löwenheim-Skolem ein abzählbares Modell \mathfrak{A} (da sie ein unendliches Modell hat). Aber dann hat \mathfrak{A} keine Substruktur \mathfrak{A}' mit $\mathfrak{A}' \cong (\text{Pot}(\mathbb{N}), \subseteq)$, weil $\text{Pot}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist.

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass die Klasse aller *archimedischen* Körper nicht FO-axiomatisierbar ist. Ein linear geordneter Körper $\mathfrak{K} = (K, +, \cdot, 0, 1, <)$ heißt archimedisch, wenn zu jedem $a \in K$ eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $a < \underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}}$ existiert.

Lösung:

Angenommen, es existiert ein Axiomensystem Φ für die gegebene Klasse. Sei

$$\Psi = \{ \neg(x < \underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}}) \mid n > 0 \}$$

eine Menge von Formeln mit freier Variable x . Dann ist $\Phi \cup \Psi$ unerfüllbar.

Nach dem Kompaktheitssatz für FO existiert eine endliche unerfüllbare Teilmenge Φ_0 von $\Phi \cup \Psi$. Sei

$$m = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \neg(x < \underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}}) \in \Phi_0\}.$$

Betrachte den linearen archimedischen Körper der reellen Zahlen $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$. Es gilt $\mathfrak{R}, m+1 \models \Phi_0$ im Widerspruch dazu, dass Φ unerfüllbar ist.

Aufgabe 3

(a) Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei Φ eine Menge von FO-Formeln über einer relationalen Signatur τ , $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Phi)$ die durch Φ axiomatisierte Klasse von Strukturen, und sei \mathcal{B} eine τ -Struktur. Wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $\mathcal{A}_m \in \mathcal{K}$ existiert mit $\mathcal{B} \equiv_m \mathcal{A}_m$, dann gilt $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes aus (a), dass die Klasse der Graphen, in denen jeder Knoten nur endlich viele Nachfolger hat, nicht FO-axiomatisierbar ist.

Lösung:

(a) Wäre $\mathcal{B} \notin \mathcal{K}$, dann gäbe es einen Satz $\varphi \in \Phi$ mit $\text{qr}(\varphi) = m$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$. Da aber $\mathcal{A}_m \models \varphi$ und $\mathcal{B} \equiv_m \mathcal{A}_m$ gilt, ist $\mathcal{B} \models \varphi$, Widerspruch.

(b) Angenommen, es existiert ein Axiomensystem Φ für die gegebene Klasse. Sei \mathcal{B} der Graph (\mathbb{N}, E) mit $E = \{(0, i) \mid i > 0\}$. Für $m \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathcal{A}_m = (\{v\} \cup \{v_1, \dots, v_m\}, \{(v, v_i) \mid i \in \{1, \dots, m\}\}).$$

Es ist klar, dass die Duplikatorin das Spiel $G_m(\mathcal{A}_m, \mathcal{B})$ gewinnt, also gilt $\mathcal{B} \equiv_m \mathcal{A}_m$. Nach dem Satz aus (a) ist $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$, Widerspruch zur Definition der Klasse.

Aufgabe 4

(a) Ist die folgende Schlussregel korrekt?

$$\frac{\Gamma, \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta, \varphi(c)}$$

(b)* Formalisieren Sie in der Prädikatenlogik die Aussage „Der Dorfbarbier b rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren.“ und beweisen Sie anhand des Sequenzkalküls, dass es einen solchen Barbier nicht geben kann.

Hinweis: Konstruieren Sie eine Ableitung einer geeigneten Sequenz $\Gamma \Rightarrow \emptyset$, wobei Γ die obige Aussage formalisiert.

Lösung:

(a) Die Schlußregel ist nicht korrekt. Sei $\tau = \{1, 2, 3\}$ und seien $\Gamma = \{1 \neq 2, 1 \neq 3, 2 \neq 3\}$ und $\Delta = \emptyset$. Seien $\varphi(x) = (x = 1 \vee x = 2)$ und $\psi(x) = (x = 2 \vee x = 3)$. Dann ist die Prämisse gültig (das Antezedens ist unerfüllbar), die Konklusion aber nicht:

$$\frac{\{1 \neq 2, 1 \neq 3, 2 \neq 3\}, \forall x(x = 1 \vee x = 2 \rightarrow x = 2 \vee x = 3) \Rightarrow \emptyset}{\{1 \neq 2, 1 \neq 3, 2 \neq 3\}, c = 2 \vee c = 3 \Rightarrow c = 2 \vee c = 2},$$

wenn wir die Konstante c mit $c^{\mathfrak{A}} = 3$ interpretieren.

(b) Sei R ein zweistelliges Relationssymbol und b eine Konstante, wobei b den Barbier bezeichnet und Rcd genau dann gilt, wenn d von c rasiert wird. Nun kann man die Aussage als

$$\varphi := \forall x((\neg Rxx \rightarrow Rbx) \wedge (Rbx \rightarrow \neg Rxx))$$

formalisieren. Wir zeigen, dass die Formelmenge $\{\varphi\}$ unerfüllbar ist, indem wir die Sequenz $\varphi \Rightarrow \emptyset$ ableiten:

$$\frac{\frac{\frac{\text{Axiom}}{Rbb \Rightarrow Rbb} \quad \frac{\text{Axiom}}{Rbb \Rightarrow Rbb} (\neg \Rightarrow)}{Rbb, \neg Rbb \Rightarrow \emptyset} (\neg \Rightarrow) \quad \frac{\frac{\text{Axiom}}{\neg Rbb \Rightarrow \neg Rbb} \quad \frac{\text{Axiom}}{\emptyset \Rightarrow Rbb, \neg Rbb} (\Rightarrow \neg)}{Rbb \rightarrow \neg Rbb \Rightarrow \neg Rbb} (\rightarrow \Rightarrow)}{Rbb, Rbb \rightarrow \neg Rbb \Rightarrow \emptyset} (\rightarrow \Rightarrow)}{\frac{\neg Rbb \rightarrow Rbb, Rbb \rightarrow \neg Rbb \Rightarrow \emptyset}{(\neg Rbb \rightarrow Rbb) \wedge (Rbb \rightarrow \neg Rbb) \Rightarrow \emptyset} (\wedge \Rightarrow)} (\rightarrow \Rightarrow)}{\forall x((\neg Rxx \rightarrow Rbx) \wedge (Rbx \rightarrow \neg Rxx)) \Rightarrow \emptyset} (\forall \Rightarrow)}$$

Aufgabe 5*

Geben Sie einen Algorithmus an, der das Erfüllbarkeitsproblem für FO auf Strukturen der Größe höchstens n entscheidet. Hierbei ist n eine beliebige, aber feste natürliche Zahl.

Lösung:

Es gibt nur endlich viele Strukturen der Größe höchstens n . Der Algorithmus prüft für jede solche Struktur \mathfrak{A} , ob sie ein Modell des gegebenen Satzes φ ist. Hierfür konstruiert er das *endliche* Model-Checking Spiel $MC(\mathfrak{A}, \varphi)$ und bestimmt den Gewinner.