4. Übung Mathematische Logik – Lösungen

Aufgabe 4 Eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ ist *endlich axiomatisierbar*, wenn eine endliche Formelmenge $\Psi \subseteq \mathrm{AL}$ existiert, welche die gleichen Modelle hat wie Φ.

Sei $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Formelmenge, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, $\varphi_{n+1} \models \varphi_n$ aber $\varphi_n \not\models \varphi_{n+1}$. Zeigen Sie, dass Φ nicht endlich axiomatisierbar ist.

Beweis. Angenommen, Φ wäre endlich axiomatisierbar durch $\Psi \subseteq \mathrm{AL}$. Dann gäbe es laut Kompaktheitssatz auch ein endliches Axiomensystem $\Phi_0 \subseteq \Phi$ (vergl. 3. Übung, Aufgabe 4). Sei ℓ der grösste Index einer darin auftretenden Formel, $\ell := \max\{i \in \mathbb{N} : \varphi_i \in \Phi_0\}$. Da $\varphi_{n+1} \models \varphi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, können wir schliessen $\varphi_\ell \models \bigwedge \Phi_0$. Andererseits ist Φ_0 ein Axiomensystem für Φ, folglich gilt $\varphi_\ell \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$, insbesondere auch $\varphi_\ell \models \varphi_{\ell+1}$ — ein Widerspruch. Die Menge Φ ist also nicht endlich axiomatisierbar.